PACS numbers: **01.65.+g, 02.70.–c, 89.70.–a**
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200902j.0216

Развитие теоремы отсчётов Котельникова

Н.А. Кузнецов, И.Н. Синицын

1. Введение

С именем академика В.А. Котельникова связана целая эпоха развития связи, радиотехники и радиофизики. К его крупнейшим научным достижениям, оказавшим существенное влияние на развитие мировой науки, следует отнести *открытие теоремы отсчётов* [1], носящей его имя, создание теории потенциальной помехоустойчивости, давшей учёным и инженерам инструмент для синтеза оптимальных систем обработки сигналов в системах связи, радиолокации, радионавигации и других системах, а также разработку планетарных радиолокаторов и проведение с их помощью фундаментальных астрономических исследований.

В 1932 г. В.А. Котельников подготовил для научной конференции доклад "О пропускной способности эфира и проволоки". В докладе им впервые была сформулирована знаменитая теорема отсчётов — одна из основных теорем теории связи. Этот доклад был опубликован ограниченным тиражом в 1933 г.

Рассмотрим современное развитие теоремы отсчетов, её связь с фильтрацией непрерывных сигналов по дискретным наблюдениям, а также информационные аспекты компьютерного эксперимента при цифровой обработке сложных сигналов.

2. Теорема отсчётов Котельникова

Теорема отсчётов во временнóй области. *Непрерывный сигнал $x(t)$, имеющий спектр, ограниченный максимальной частотой F_{m}, может быть однозначно и без потерь восстановлен по своим дискретным отсчётам с частотой $F_{\text{дискр}} \geqslant F_{\mathrm{m}}$. Алгоритм интерполяции этой функции по дискретным отсчетам с интервалом Δt_{m}:*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t_{\mathrm{m}}) \, \frac{\sin\left[\omega_{\mathrm{m}}(t - k\Delta t_{\mathrm{m}})\right]}{\omega_{\mathrm{m}}(t - k\Delta t_{\mathrm{m}})} \,, \tag{1}$$

где $\omega_{\mathrm{m}} = 2\pi F_{\mathrm{m}}$ — частота Котельникова. Интервал дискретизации $\Delta t_{\mathrm{m}} = 1/(2F_{\mathrm{m}})$ часто называют интервалом Котельникова.

Теорема отсчётов в частотной области. *Для сигнала $x(t)$, ограниченного на $|t| < T$, для непрерывного спектра $s_x(f)$:*

$$s_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_x(2\pi k\Delta f) \, \frac{\sin 2\pi T\,(f - k\Delta f)}{2\pi T\,(f - k\Delta f)} \,, \tag{2}$$

где Δf — шаг отсчёта частоты.

Независимо теорема отсчётов была установлена в 1949 г. выдающимся американским ученым К. Шенноном — создателем важного раздела теории связи — теории информации. Эта теорема имеет исключительное значение для техники связи. Следует отметить, что как один из частных математических результатов теории интерполяции функции эта теорема была открыта ещё в начале XX в. английскими математиками Е.Т. Уитекером и Дж.М. Уитекером. Однако это крупнейшее научное достижение по праву связывают с именами Котельникова и Шеннона, так как именно благодаря открытию ими теоремы отсчётов инженеры получили возможность создания цифровых систем, которые в конце XX в. произвели революцию в электросвязи и цифровой обработке сигналов.

3. Применение теоремы Котельникова

В.А. Котельников установил теорему отсчётов, пытаясь найти ответ на принципиальный вопрос: какова минимальная полоса частот, необходимая для передачи по каналу связи сообщения, спектр которого строго ограничен? Сегодня общепризнанно, что эта теорема — один из фундаментальных результатов цифровой обработки сигналов (ЦОС) в теории связи.

Область применения теоремы чрезвычайно широка. В качестве примера приведем дискретные каналы связи и устройства цифровой записи информации, предназначенные для передачи и записи звуковых сигналов. В соответствии с теоремой Котельникова были выбраны следующие частоты дискретизации:

- 8000 Гц — для телефона;
- 22050 Гц — для радио;
- 44100 Гц — для аудио-компакт-диска.

О широком применении этих устройств говорит тот факт, что в 2003 г. по данным американской ассоциации записывающей промышленности RIAA (Recording Industry Association of America) было продано 749,9 млн компакт-дисков.

4. Обобщения теоремы В.А. Котельникова

Практика проектирования и эксплуатации цифровых устройств записи, передачи и воспроизведения непрерывных сигналов поставила перед исследователями новые задачи по разработке таких алгоритмов ЦОС, как оценивание и моделирование. В первую очередь следует отметить, что теорема Котельникова решает задачу только интерполяции функции при наблюдении отсчётов функции на бесконечном интервале времени, $-\infty < t < +\infty$. В практических задачах всегда имеют дело *с конечным интервалом наблюдения*, и необходимо решать не только задачи интерполяции функций на конечном интервале, но и задачи фильтрации, т.е. оценивания значения функции в момент времени по наблюдениям на интервале от 0 до t, а также задачи экстраполяции (прогнозирования) значений функции в момент времени $T > t$ по наблюдениям на интервале от 0 до t. Поэтому встал вопрос о разработке алгоритмов восстановления значений функции в промежутке между дискретными отсчётами, в момент t, который лежит в интервале между t_i и t_{i+1}, т.е. о замене бесконечного ряда (1) конечным рядом. Для практических реализаций были предложены экстраполяторы разной сложности, в основном в виде степенно́го ряда, полинома Лагранжа, сплайнов, атомарных функций и т.д. [2].

Результаты В.А. Котельникова породили целый ряд исследований, направленных на устранение следующих ограничений, принятых при доказательстве теоремы Котельникова [3–7]:

1) фиксированный нулевой начальный отсчёт;

2) неограниченность спектра реальных стохастических сигналов;

3) сложность расчётов при восстановлении функции членами рядов (1) и (2);

4) неравномерность отсчётов;

5) сгруппированность отсчётов;

6) невозможность определения статистических характеристик погрешностей при дискретизации;

7) невозможность учёта погрешностей измерения функции в точках отсчёта t_i;

8) невозможность учёта погрешностей, вызванных ограниченной разрядностью, при цифровой реализации рядов (1) и (2) и др.

5. Фильтрация и моделирование непрерывных процессов по дискретным наблюдениям и теорема В.А. Котельникова

Как известно [8], принципиально новые возможности в создании алгоритмов фильтрация непрерывного сигнала по дискретным измерениям появились после работ Р. Калмана, в которых полезный сигнал был представлен в виде решения линейного стохастического дифференциального уравнения. Представим себе некоторую систему, состояние которой в любой момент времени однозначно определяется некоторым набором фазовых переменных (выходные координаты и их производные), недоступных для непосредственного измерения. Кроме того, имеется ряд переменных, некоторым образом связанных с состоянием системы, которые можно измерить в некоторые дискретные моменты времени с заданной точностью. В работах Р. Калмана были рассмотрены случаи фильтрации координат в условиях, когда полезный сигнал описывается непрерывными стохастическими дифференциальными уравнениями и наблюдения являются непрерывными, и в условиях, когда полезный сигнал описывается рекуррентной случайной последовательностью (дискретным аналогом стохастического дифференциального уравнения) и наблюдения происходят в дискретные моменты времени. В [9] поставлены и решены задачи управления наблюдениями.

При компьютерной реализации фильтра Калмана существенными оказываются два следующих обстоятельства.

1. Матричный коэффициент усиления фильтра находится путём решения дискретного нелинейного уравнения Риккати, причём матрица условных ковариаций ошибки фильтрации "рассимметризируется" вследствие ограниченности разрядности цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

2. При моделировании реальных процессов на ЦВМ модели с непрерывными пространствами состояний заменяются моделями с дискретными пространствами состояний, что вносит дополнительные искажения в результаты. Причина такого усложнения заключается в том, что любая процедура дискретизации по самой своей природе — это сильно нелинейное (более того, разрывное) отображение, вносящее существенные искажения в преобразуемый сигнал. *Влияние такого рода искажений на качественном уровне также объясняется теоремой Котельникова*, однако количественный учёт такого влияния сопряжён с существенными техническими и фундаментальными теоретическими трудностями. Следует отметить, что, к сожалению, в литературе этому феномену не уделяется должного внимания, поэтому рассмотрим данную проблему несколько подробнее.

6. Два фундаментальных вопроса компьютерного эксперимента

Первый. Основная задача компьютерного эксперимента в конечном счёте заключается в получении *информации* о моделируемом объекте. Но если это так, то следует иметь в виду, что в то время как от одной непрерывной модели к другой часто можно перейти без потери информации (гомеоморфные замены переменных и т.п.), *переход от непрерывного объекта к дискретной модели, как правило, не возможен без потери информации*. Простой пример: дискретизация обратимой линейной системы на равномерную решётку, как правило, оказывается необратимым отображением. Другой пример: основная информационная характеристика динамической системы — её энтропия — измеряет экспоненциальную скорость возрастания отношения количества различных траекторий системы к их длине. Но в любой однозначной пространственной дискретизации системы возможно лишь ограниченное число бесконечных траекторий, и определение энтропии в этом случае становится бессмысленным. Здесь противоречие между непрерывным объектом и его дискретной моделью очевидно; очевидна и необходимость развития методов оценки энтропии непрерывной системы по её дискретизациям. Отметим, что хотя различные методы решения этой проблемы уже существуют, в целом поставленная задача оказывается весьма трудной. В других ситуациях конфликт может быть менее очевидным, но не менее опасным. Следовательно, первый фундаментальный вопрос каждого компьютерного эксперимента: *какова потеря информации при выбранной схеме перехода от непрерывного объекта к дискретному*?

Второй. Вопрос связан с аналогами понятий грубости и структурной устойчивости в непрерывной математике. При непрерывном моделировании, если отбросить словесное оформление, это, по существу, вопрос о том, насколько устойчивы те или иные свойства объекта по отношению к непрерывным, гладким и т.п. (но обязательно малым в каком-то непрерывном смысле) возмущениям. Но если мы принимаем, что при компьютерном моделировании основным является вопрос об информации, то мы должны поставить и следующий вопрос: *можем ли мы гарантировать информационную грубость выбранной схемы перехода от непрерывного объекта к дискретному*?

Вероятно, всесторонний анализ этих вопросов явится в ближайшие десятилетия одним из стратегических направлений в развитии точных наук. Дать цельное описание ситуации в этой области и тем более прогноз её развития — задача безнадёжная. Некоторые первые достижения в этой области получены в [10–12].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00256 и 07-07-00031).

Список литературы

1. Котельников В А "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи", в сб. *Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюз. съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности* (М.: Управление связи РККА, 1933) с. 1; переиздание: *О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи* (М.: Институт радиотехники и электроники МЭИ (ТУ), 2003); *УФН* **176** 762 (2006) [Kotel'nikov V A *Phys. Usp.* **49** 736 (2006)]
2. Кравченко В Ф, Рвачев В Л *Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях* (М.: Физматлит, 2006)
3. Whittaker E T "On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory" *Proc. R. Edinburgh* (35) 181 (1915)
4. Balakrishnan A V "A note of the sampling principle for continuous signals" *IEEE Trans. Inform. Theory* **3** 143 (1957)
5. Беляев Ю К "Аналитические случайные процессы" *Теория вероятностей и ее применения* (4) 402 (1959)
6. Beutler F J "Sampling theorems and basis in a Hilbert space" *Inform. Control* (4) 97 (1961)
7. Jerri A J "The Shannon sampling theorem — its various extensions and applications: a tutorial review" *Proc. IEEE* (65) 1565 (1977)
8. Синицын И Н *Фильтры Калмана и Пугачева* (М.: Логос, 1-е изд. — 2005, 2-е изд. — 2007)
9. Григорьев Ф Н, Кузнецов Н А, Серебровский А П *Управление наблюдениями в автоматических системах* (М.: Наука, 1986)
10. Козякин В С, Кузнецов Н А "Достоверность компьютерного моделирования с точки зрения теории информации" *Информационные процессы* **7** 323 (2007); http://www.jip.ru/2007/323-368-2007.pdf
11. Vladimirov I "Quantized linear systems on integer lattices: Frequency-based approach. Part I", CADSEM Report 96-032 (Geelong, Australia: Deakin Univ., 1996)
12. Diamond P, Vladimirov I "Higher-order terms in asymptotic expansion for information loss in quantized random processes" *Circuits, Systems, Signal Process.* **20** 677 (2001)